Marian Maciocha

Wszystkie liczby – rozwiązanie zadania dla Czytelników (SM29)

Zadanie:

Znajdź wszystkie (dodatnie) liczby naturalne takie, że gdy ostatnią cyfrę takiej liczby przeniesiemy na początek, to liczba zwiększy się o 50%.

Odpowiedź:

(Dodatnie) liczby naturalne:

285714,

285714285714,

285714285714285714,

285714285714285714285714,

. . . . .

285714285714 … 285714
m ciągów cyfr „285714"

oraz

571428,

571428571428,

571428571428571428,

571428571428571428571428,

. . . . .

571428571428 … 571428
m ciągów cyfr „571428"

to wszystkie (dodatnie) liczby naturalne takie, że gdy ostatnią cyfrę takiej liczby przeniesiemy na początek, to liczba zwiększy się o 50%.

Rozwiązanie, czyli jak otrzymać powyższe liczby:

Niech szukana (dodatnia) liczba naturalna będzie miała postać: $c_n \dots c_1 c_0$.

Z treści zadania wynika, że:

$1{,}5 * c_{n-1} \dots c_1 c_0 = c_0 c_{n-1} \dots c_1.$ (1)

Najpierw udowodnimy, że c_0 jest cyfrą różną od zera.

Dowód nie wprost: niech $c_0 = 0$, wówczas:

$c_n \dots c_1 0 > 0 c_n \dots c_1$, (2a)

natomiast z (1) wynika, że:

$c_{n-1} \dots c_1 c_0 < c_0 c_{n-1} \dots c_1.$ (2b)

Nierówności (2a) i (2b) są sprzeczne ze sobą, co oznacza, że cyfra c_0 nie jest cyfrą zero.

Mnożymy obie strony równości (1) przez 10:

$15 * c_{n-1} \dots c_1 c_0 = c_0 c_{n-1} \dots c_1 0.$ (3)

Do obu stron równości (3) dodajemy liczbę c_0:

$15 * c_{n-1} \dots c_1 c_0 + c_0 = c_0 c_{n-1} \dots c_1 0 + c_0$

Kolejno wykonujemy następujące przekształcenia:

$15 * c_{n-1} \dots c_1 c_0 + c_0 = c_0 c_{n-1} \dots c_1 c_0$

$15 * c_{n-1} \dots c_1 c_0 + c_0 = c_0 * 10^n + c_{n-1} \dots c_1 c_0$

$15 * c_{n-1} \dots c_1 c_0 - c_{n-1} \dots c_1 c_0 = c_0 * 10^n - c_0$

$14 * c_{n-1} \dots c_1 c_0 = c_0 * (10^n - 1)$

$14 * c_{n-1} \dots c_1 c_0 = c_0 * \underbrace{9 \dots 9}_{n \text{ „dziewiątek”}}$

$2 * 7 * c_{n-1} \dots c_1 c_0 = c_0 * 9 \dots 9$

$$c_{n-1} \dots c_1 c_0 = \frac{c_0 * 9 \dots 9}{2 * 7} \qquad (4)$$

Zauważmy:

Liczba 9 … 9 nie jest podzielna przez 2. Liczba c_0 nie jest podzielna przez 14, ponieważ liczba c_0 jest mniejsza od 10. Dlatego liczba 9 … 9 musi być podzielna przez 7 i różna od 0 liczba c_0 musi być podzielna przez 2, czyli c_0 należy do zbioru {2, 4, 6, 8}.

Wyznaczmy liczbę 9 … 9, która jest podzielna przez 7:

```
142857
------
999999  : 7
7
--
29
28
---
 19
 14
 ---
  59
  56
  ---
   39
   35
   ---
    49
    49
    --
    ==
```

Zatem równanie (4) przyjmuje postać:

$$c_{n-1} \ldots c_1c_0 = \frac{c_0}{2} * \underbrace{142857142857 \ldots 142857}_{\text{m ciągów cyfr „142857”}} \qquad (5)$$

Jeśli $c_0 = 2$, to z równania (5) otrzymujemy:

$$c_{n-1} \ldots c_1c_0 = \frac{2}{2} * 142857142857 \ldots 142857 = 142857142857 \ldots 142857,$$

a stąd $c_0 = 7$, co oznacza sprzeczność. Zatem c_0 nie może być równe 2.

Jeśli $c_0 = 4$, to z równania (5) otrzymujemy:

$$c_{n-1} \dots c_1c_0 = \frac{4}{2} * \underset{\text{m ciągów cyfr „142857”}}{142857142857 \dots 142857} = 2 * \underset{\text{m ciągów cyfr „142857”}}{142857142857 \dots 142857} =$$

$$= \underset{\text{m ciągów cyfr „285714”}}{285714285714 \dots 285714}.$$

Sprawdzamy rozwiązanie:

$$\frac{3}{2} * \underset{\text{m ciągów cyfr „285714”}}{285714285714 \dots 285714} = 3 * \underset{\text{m ciągów cyfr „142857”}}{142857142857 \dots 142857} = \underset{\text{m ciągów cyfr „428571”}}{428571428571 \dots 428571}$$

Zatem warunek zadania (1) jest spełniony.

Jeśli $c_0 = 6$, to z równania (5) otrzymujemy:

$$c_{n-1} \dots c_1c_0 = \frac{6}{2} * \underset{\text{m ciągów cyfr „142857”}}{142857142857 \dots 142857} = 3 * \underset{\text{m ciągów cyfr „142857”}}{142857142857 \dots 142857} =$$

$$= \underset{\text{m ciągów cyfr „428571”}}{428571428571 \dots 428571},$$

a stąd $c_0 = 1$, co oznacza sprzeczność. Zatem c_0 nie może być równe 6.

Jeśli $c_0 = 8$, to z równania (5) otrzymujemy:

$$c_{n-1} \dots c_1c_0 = \frac{8}{2} * \underset{\text{m ciągów cyfr „142857”}}{142857142857 \dots 142857} = 4 * \underset{\text{m ciągów cyfr „142857”}}{142857142857 \dots 142857} =$$

$$= \underset{\text{m ciągów cyfr „571428”}}{571428571428 \dots 571428},$$

Sprawdzamy rozwiązanie:

$$\frac{3}{2} * \underset{\text{m ciągów cyfr „571428”}}{571428571428 \dots 571428} = 3 * \underset{\text{m ciągów cyfr „285714”}}{285714285714 \dots 285714} = \underset{\text{m ciągów cyfr „857142”}}{857142857142 \dots 857142}$$

Zatem warunek zadania (1) jest spełniony.

Odpowiedź:

(Dodatnie) liczby naturalne:

285714,

285714285714,

285714285714285714,

285714285714285714285714,

. . . . .

$\underbrace{285714285714 \ldots 285714}_{\text{m ciągów cyfr „285714”}}$

oraz

571428,

571428571428,

571428571428571428,

571428571428571428571428,

. . . . .

$\underbrace{571428571428 \ldots 571428}_{\text{m ciągów cyfr „571428”}}$

to wszystkie (dodatnie) liczby naturalne takie, że gdy ostatnią cyfrę takiej liczby przeniesiemy na początek, to liczba zwiększy się o 50%.